Zermelova-Fraenkelova teorie množin (ZF)

1) Existence

2) Extensionalita: množiny jsou určeny prvky

množiny

3) Schéma ax. vydělení: $\varphi(x)$ je formule

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\big(x\in z \longleftrightarrow x\in a \wedge \varphi(x)\big)$$

4) axiom dvojice: $a, b \rightsquigarrow \{a, b\}$

5) Axiom sumy:

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)\big(x\in z \longleftrightarrow (\exists y)(x\in y \wedge y\in a)\big)$$

Značíme $z = \bigcup a \;\left(= \bigcup_{y\in a} y\right)$.

6) Potence: Pro libovolnou a existuje $\mathcal{P}(a)$.

7) nekonečno: „Existuje induktivní množina z"

$$(\exists z)\big(\emptyset\in z \wedge (\forall x)(x\in z \longrightarrow \underbrace{x\cup\{x\}}_{\text{následník}}\in z)\big)$$

8) Schéma axiomů nahrazení:

Buď $\psi(u,v)$ formule (neobsahující w, z), pak

$$\underbrace{(\forall u)(\forall v)(\forall w)\big(\psi(u,v)\wedge\psi(u,w)\longrightarrow v=w\big)}_{\text{„}\psi\text{ je zobrazení"}}$$

PAK

$$\longrightarrow \underbrace{(\forall a)(\exists z)(\forall v)}\underbrace{\big(v\in z \longleftrightarrow (\exists u)(u\in a \longleftrightarrow \psi(u,v))\big)}.$$

Existuje ψ-obraz a, a sice z.

9) Axiom fundovanosti:

$$(\forall a)\big(a\neq\emptyset \longrightarrow (\exists x)(x\in a \wedge x\cap a=\emptyset)\big)$$

Poznámka: Ax. 9) vypovídá o V (universum množin) jako o celku.

9) $\Longrightarrow$ neexistují nekonečné $\in$-řetězce

$\ldots \in a_{-1} \in a_0 \in a_1 \ldots$ nejde.

9) $\Longrightarrow V = \bigcup_{\alpha\in On} \mathcal{P}_{\alpha}(\emptyset)$: „Univ. vznikne iterováním potence na $\emptyset$"

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ atd...

ZAVEDENÍ ZÁKL. POJMŮ

- $X \subseteq Y \overset{def}{\iff} (\forall u)(u \in X \to u \in Y)$
- $X \subset Y \overset{def}{\iff} X \subseteq Y \wedge X \neq Y$

Platí: $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \to X = Y$

(z ax.; použijte 2).)

- Je-li a množina, φ fle, definujeme $\{x \in a : \varphi(x)\}$ ... je to mn. díky ax. vydělení pro φ.
- $\emptyset = \{x \in a : x \neq x\}$ pro nějakou mn. a.
- $A \cap B \overset{def}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}$ je mn.

$\varphi(x) : x \in B.$

Průnik mn. je množina!

- $A \setminus B \overset{def}{=} \{x \in A : x \notin B\}$

Opět: jsou-li A, B mn., $A \setminus B$ je mn. podle ax. vydělení s formulí $\varphi(x) : x \notin B$.

- Jsou-li a, b množiny, pak $\{a, b\}$ je množina (podle ax. dvojice).
- $\{a\} \overset{def}{=} \{a, a\}$ je množina podle ax. dvojice.

Platí:
- $\{x\} = \{y\} \longleftrightarrow x = y$ (extenzionalita!)
- $\{x\} = \{x, y\} \longleftrightarrow y = x$
- $\{x, y\} = \{u, v\} \longleftrightarrow (x = u \wedge y = v) \vee (x = v \wedge y = u)$

(ax. 2).

• $(a,b) \overset{\text{def.}}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$

Platí: $(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)$

$$(x,y)=(u,v) \longleftrightarrow (x=u \wedge y=v)$$

Důkaz: Pokud $x \neq y$: Pak

$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$ je dvouprvková.

Podle předp.: $\{\{x\},\{x,y\}\}=(u,v)=\{\{u\},\{u,v\}\}$

$\Longleftrightarrow$ $(\{x\}=\{u\} \wedge \{x,y\}=\{u,v\}) \vee$

$\vee (\{x\}=\{u,v\} \wedge \{x,y\}=\{u\})$

(Podle předchozího)

nesmysl, neboť $\{x,y\}$ je 2-prvková. Takže $\{x,y\} \neq \{u\}$

Tedy $\{x\}=\{u\} \implies x=u$

a $\{x,y\}=\{u,v\} \implies$

$$(x=u \wedge y=v) \vee (x=v \wedge y=u)$$

Ale $x=u$, takže $y \neq u$ $(x \neq y!)$

Tedy nemůže platit. Tedy platí

Důkaz pro $x=y$: jednodušší cvičení. $\boxtimes$

• Uspořádaná k-tice nechť je už def.

$(a_1,\dots,a_k)$, položíme

$$(a_1,\dots,a_k,a_{k+1})=((a_1,\dots,a_k),a_{k+1})$$

Příklad $(a,b,c) \overset{\text{def.}}{=} (\underbrace{\underbrace{(a,b)}_{\text{dvojice}},c}_{\text{dvojice}})$

$$((a,b),c) = \{\{(a,b)\},\{(a,b),c\}\} =$$

$$= \{\{\{a,\{a,b\}\}\},\ \{\{a,\{a,b\}\},c\}\} = (a,b,c)$$

Snadné cvičení na mat. indukci

pro libovolné k přirozené číslo, jestliže $(a_1,\dots,a_k) = (b_1,\dots,b_k)$, pak $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$.

Pozn. Pro $k=1$: $(a_1) = a_1$ (aby to souhlasilo s def. pro $k=2$).

Struktura:

- množina $\to$ $\emptyset$ $\to$ $P(\emptyset)$ ...
- $\{a,b\}$ $\to$ $\{a\}$ $\to$ (a,b) $\to$ $(a_1,a_2,\dots,a_k)$
- (a,b) $\to$ $X \times Y$ $\to$ binární relace $\to$ zobr., funkce
- binární relace $\to$ uspořádání $\to$ úplný svaz $\to$ V o PB $\to$ Cantor–Bernstein

Přirozená čísla v ZF

- $0 := \emptyset$

$1 := 0 \cup \{0\} = \{0\}$

$2 := 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$

$3 := 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$

$4 := 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$

Co je to $\mathbb{N}$? Budeme značit ω:

Definice množina z je induktivní $\overset{def.}{\iff}$

$$\emptyset \in z \wedge \big((\forall x)(x \in z \longrightarrow x \cup \{x\} \in z)\big)$$

Podle axiomu nekonečna nějaká taková z existuje.

$\omega = \bigcap \{ z : z \text{ je induktivní} \}$

ω ... množina přirozených čísel.

Pozorování: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots \in \omega$:

Podle definice ind. mn., je-li z induktivní, pak $0 \in z$ $(0 = \emptyset)$.

Tedy $(\forall z)(z \text{ je induktivní} \rightarrow 0 \in z)$

$\Rightarrow 0 \in \bigcap \{ z : z \text{ je induktivní} \}$.

Nechť $n \in \omega$ je libovolné Von Neumannovo přir. číslo. Chceme, že $n+1 := n \cup \{n\}$ $\in \omega$.

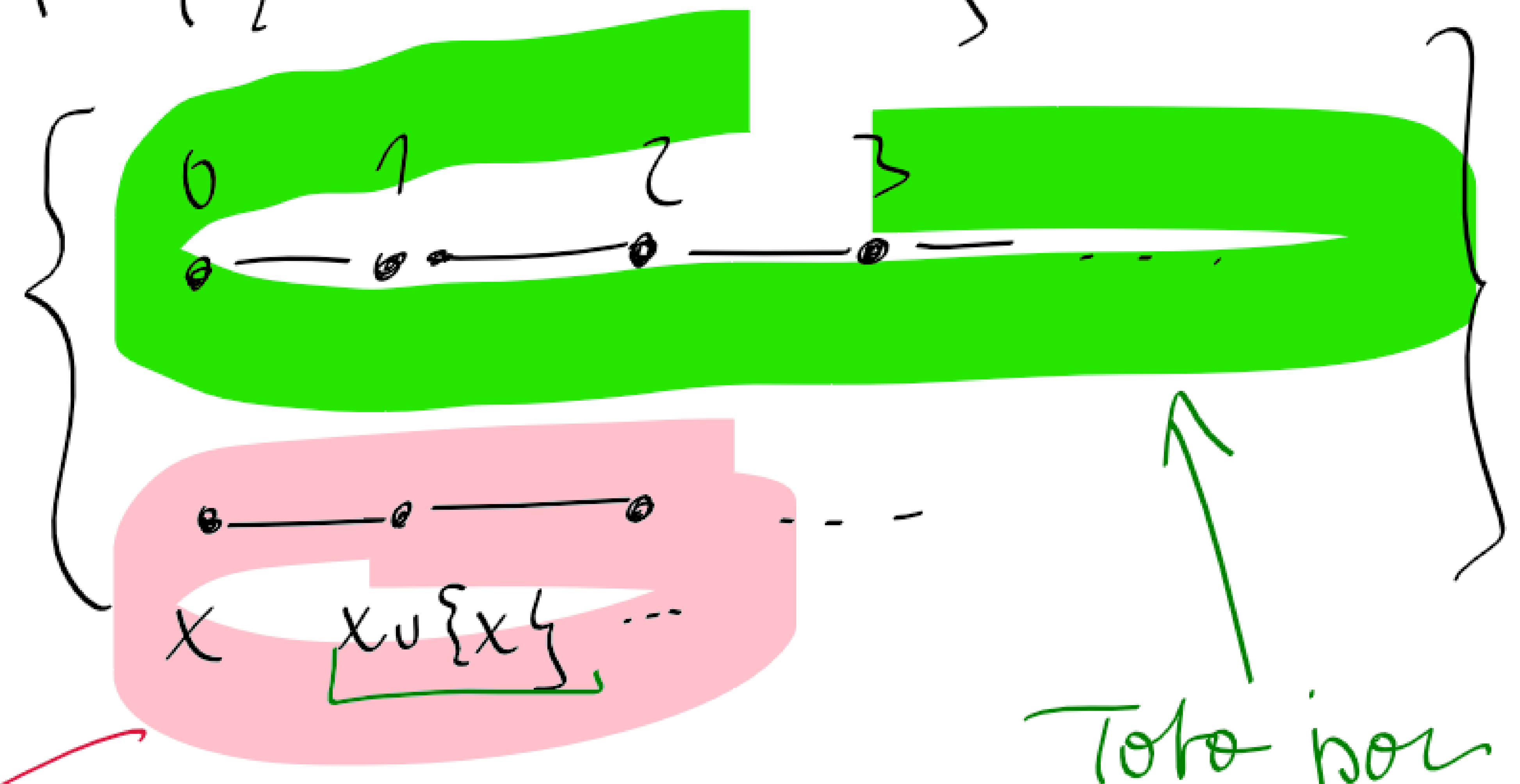
Podle předp. $n \in \omega = \bigcap \{ z : z \text{ ind} \}$, $n \in z$ pro libovolnou ind. z.

Protože z je ind., tak $n \cup \{n\} \in z$.

Tedy $(\forall z)(n \cup \{n\} \in z)$, a tedy

$n \cup \{n\} \in \bigcap \{z : z \text{ ind}\} = \omega$. ⊠

Třeba mn.



Toto jsou přir. čísla, ta tam ležet musí

podobný řetězec který tam ležet nemusí (stačí vzít $x \notin \omega$).

Pozorování: ω je induktivní množina.

Cv. i návod: ověřte definici ind. mn. pro ω, a to tak, že $\omega = \bigcap\{z : z \text{ ind.}\}$, všechny z tuto podmínku splňují $\rightsquigarrow$ tedy i ω. ⊠

Chceme: ω je model (PA).

Chceme P. ax. dokázat jako věty (ZF).

Věta: (Princip mat. indukce) Nechť φ je fle jazyka TM. Pokud

$$\varphi(0) \wedge (\forall u)(\varphi(u) \to \varphi(u \cup \{u\}))$$

Potom $\underbrace{(\forall u)(u \in \omega \to \varphi(u))}_{(\forall u \in \omega)\varphi(u)}$